দশম অধ্যায়

দ্বিপদী বিস্তৃতি

বীজগণিতীয় রাশির (একপদী, দ্বিপদী, বহুপদী) যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ, বর্গ এবং ঘন সংক্রান্ত আলোচনা পূর্ববর্তী শ্রেণিতে করা হয়েছে। দ্বিপদী রাশি বা বহুপদী রাশির ঘাত বা শক্তি তিন এর বেশি হলে সেই সমস্ত ক্ষেত্রে মান নির্ণয় যথেষ্ট শ্রমসাধ্য ও সময়সাপেক্ষ হয়ে পড়ে। এই অধ্যায়ে দ্বিপদী রাশির ঘাত বা শক্তি তিন এর বেশী হলে কি প্রক্রিয়ায় কাজটি সম্পন্ন করা যায়, তা উপস্থাপন করা হবে। সাধারণভাবে ঘাত বা শক্তি n এর জন্য সূত্র প্রতিপাদন করা হবে, যার মাধ্যমে যেকোনো অঋণাত্মক পূর্ণসাংখ্যিক ঘাতের দ্বিপদী রাশির মান নির্ণয় করা সম্ভব হবে। তবে এই পর্যায়ে n এর মান একটি নির্দিষ্ট সীমা $n \leq 8$ অতিক্রম করবে না। বিষয়টি যাতে শিক্ষার্থীরা সহজে বুঝতে ও ব্যবহার করতে পারে সে জন্য একটি ত্রিভুজ ব্যবহার করা হবে যেটি 'প্যাসকেলের ত্রিভুজ' (Pascale's triangle) বলে পরিচিত। দ্বিপদী রাশির ঘাত ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা বা ভগ্নাংশ হতে পারে। কিন্তু বর্তমান আলোচনায় আমরা শুধুমাত্র ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার ঘাতের মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকব। পরবর্তী শ্রেণিতে সমস্ত আলোচনা অন্তর্ভুক্ত থাকবে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা –

- দ্বিপদী বিস্তৃতি বর্ণনা করতে পারবে।
- প্যাসকেল ত্রিভুজ বর্ণনা করতে পারবে।
- সাধারণ ঘাতের জন্য দ্বিপদী বিস্তৃতি বর্ণনা করতে পারবে।
- $n!$ ও ${}^nC_r$ এর মান নির্ণয় করতে পারবে।
- দ্বিপদী বিস্তৃতি ব্যবহার করে গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে পারবে।

১০·১ দ্বিপদী $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতি

দুইটি পদের সমন্বয়ে গঠিত বীজগণিতীয় রাশিকে দ্বিপদী (*Binomials*) রাশি বলা হয়।

$a+b,\ x-y,\ 1+x,\ 1-x^2,\ a^2-b^2$ ইত্যাদি দ্বিপদী রাশি। আমরা প্রথমেই একটি দ্বিপদী রাশি $(1+y)$ চিন্তা করি। এখন $(1+y)$ কে যদি ক্রমাগত $(1+y)$ দ্বারা গুণ করতে থাকি তাহলে পাব

$(1+y)^2,\ (1+y)^3,\ (1+y)^4,\ (1+y)^5$........... ইত্যাদি।

আমরা জানি,

$$(1+y)^2 = (1+y)(1+y) = 1+2y+y^2$$

$$(1+y)^3 = (1+y)(1+y)^2 = (1+y)(1+2y+y^2) = 1+3y+3y^2+y^3$$

অনুরূপভাবে দীর্ঘ গুণন প্রকৃয়িার মাধ্যমে $(1+y)^4, (1+y)^5$...... ইত্যাদি গুণফল নির্ণয় সম্ভব। কিন্তু $(1+y)$ এর ঘাত বা শক্তি যত বাড়তে থাকবে গুণফল তত দীর্ঘ ও সময়সাপেক্ষ হবে। তাই এমন একটি সহজ পদ্ধতি বের করতে হবে যাতে $(1+y)$ এর যে কোন ঘাত (ধরি n) বা শক্তির জন্য $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতি সহজেই নির্ণয় করা সম্ভব হবে। n এর মান 0, 1, 2, 3, 4,........ অর্থাৎ অঋণাত্মক মানের জন্য এই অংশে আলোচনা সীমাবদ্ধ থাকবে। এখন প্রক্রিয়াটি আমরা ভালভাবে লক্ষ করি।

n এর মান		প্যাসকেল ত্রিভুজ	পদসংখ্যা
$n=0$	$(1+y)^\circ =$	1	1
$n=1$	$(1+y)^1 =$	$1+y$	2
$n=2$	$(1+y)^2 =$	$1+2y+y^2$	3
$n=3$	$(1+y)^3 =$	$1+3y+3y^2+y^3$	4
$n=4$	$(1+y)^4 =$	$1+4y+6y^2+4y^3+y^4$	5
$n=5$	$(1+y)^5 =$	$1+5y+10y^2+10y^3+5y^4+y^5$	6

উপরের বিস্তৃতিসমূহকে ভিত্তি করে আমরা $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতি সম্পর্কে নিম্নোক্ত সিদ্ধান্তে আসতে পারি।

সিদ্ধান্ত :

(a) $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(n+1)$ সংখ্যক পদ আছে। অর্থাৎ ঘাত বা শক্তির চেয়ে পদসংখ্যা একটি বেশি।
(b) y এর ঘাত 0 (শুন্য) থেকে শুরু হয়ে $1, 2, 3, ..., n$ পর্যন্ত বৃদ্ধি পেয়েছে। অর্থাৎ y এর ঘাত ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি পেয়ে n পর্যন্ত পৌঁছেছে।

দ্বিপদী সহগ : উপরের প্রত্যেক দ্বিপদী বিস্তৃতিতে y এর বিভিন্ন ঘাতের সহগ (*Cocfficicat*) কে দ্বিপদী সহগ বলা হয়। 1 কে y এর সহগ বিবেচনা করতে হবে। উপরের বিস্তৃতির সহগগুলোকে সাজালে আমরা পাই,

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

লক্ষ করলে দেখব সহগগুলো একটি ত্রিভুজের আকার ধারণ করেছে। দ্বিপদী বিস্তৃতির সহগ নির্ণয়ের এই কৌশল '*Blaise Pascal*' প্রথম ব্যবহার করেন। তাই এই ত্রিভুজকে প্যাসকেলের ত্রিভুজ (*Pascal's Triangle*) বলা হয়। প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে আমরা সহজেই দ্বিপদী রাশির বিস্তৃতিতে সহগসমূহ নির্ণয় করতে পারি।

প্যাসকেলের ত্রিভুজের ব্যবহার

প্যাসকেলের ত্রিভুজ থেকে আমরা দেখতে পাই এর বাম ও ডান দিকে আছে '1'। ত্রিভুজের মাঝখানের সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটি ঠিক উপরের দুইটি সংখ্যার যোগফল।
নিম্নের উদাহরণটি লক্ষ করলে বিষয়টি খুব সহজেই বুঝা যাবে।

$n=5$ এর জন্য দ্বিপদী সহগ হলো : 1 5 10 10 5 1

$n = 6$ এর জন্য সহগগুলো হবে নিম্নরূপ :

$$\begin{array}{llllllllllll} n=5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ n=6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \end{array}$$

$\therefore (1+y)^5 \;\; = 1 + 5y + 10y^2 + 10y^3 + 5y^4 + y^5$

$\therefore (1+y)^6 \;\; = 1 + 6y + 15y^2 + 20y^3 + 15y^4 + 6y^5 + y^6$

এবং $(1+y)^7 = 1 + 7y + 21y^2 + 35y^3 + 35y^4 + 21y^5 + 7y^6 + y^7$

কাজ : নিম্নোক্ত বিস্তৃতিসমূহ নির্ণয় কর : (উপরের বিস্তৃতিসমূহের সাহায্য নাও) :

$(1+y)^8 =$

$(1+y)^9 =$

$(1+y)^{10} =$

আমরা যদি ভালভাবে খেয়াল করি তাহলে বুঝতে পারব এই পদ্ধতির একটি বিশেষ দুর্বলতা আছে। যেমন আমরা যদি $(1+y)^5$ এর বিস্তৃতি জানতে চাই তাহলে $(1+y)^4$ এর বিস্তৃতি জানা দরকার। আবার যেকোনো দ্বিপদী সহগ জানার জন্য তার ঠিক উপরের পূর্ববর্তী দুইটি সহগ জানা প্রয়োজন । এই অবস্থা থেকে উত্তরণের জন্য আমরা সরাসরি দ্বিপদী সহগ নির্ণয়ের কৌশল বের করতে চাই। প্যাসকেলের ত্রিভুজ থেকে আমরা দেখতে পাই দ্বিপদী বিস্তৃতির সহগগুলো ঘাত n এবং পদটি কোন অবস্থানে আছে তার উপর নির্ভরশীল। আমরা একটি নতুন সাংকেতিক চিহ্ন $\binom{n}{r}$ বিবেচনা করি যেখানে 'n' ঘাত এবং 'r' পদের অবস্থানের সাথে সম্পর্কিত। উদাহরণ স্বরূপ যদি $n = 4$ হয় তবে পদসংখ্যা হবে 5 টি । ধরি, পদ পাঁচটি যথাক্রমে T_1, T_2, T_3, T_4, T_5

আমরা পদগুলি নিম্নোক্ত উপায়ে লিখি।

যখন $n = 4$ পদসংখ্যা 5 টি : T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 ।

তাদের সহগগুলি হলো : $\quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$

নতুন চিহ্ন ব্যবহার করে সহগ : $\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$

এখানে, $\binom{4}{0} = 1$, $\binom{4}{1} = \frac{4}{1} = 4$

$\binom{4}{2} = \frac{4\times3}{1\times2} = 6$, $\binom{4}{3} = \frac{4\times3\times2}{1\times2\times3} = 4$ এবং $\binom{4}{4} = \frac{4\times3\times2\times1}{1\times2\times3\times4} = 1$

[[প্যাসকেলের ত্রিভুজ থেকে সহজেই বুঝতে পারবে]

উল্লিখিত নতুন চিহ্নের সাহায্যে প্যাসকেলের ত্রিভুজ $(n = 1,2,3,........)$ এর জন্য হবে :

$n=1$	$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$
$n=2$	$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$
$n=3$	$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$
$n=4$	$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$
$n=5$	$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$

সুতরাং উপরের ত্রিভুজ থেকে আমরা খুব সহজেই বলতে পারি $(1+y)^4$ এর বিস্তৃতির তৃতীয় (T_{2+1}) পদের সহগ $\binom{4}{2}$ এবং $(1+y)^5$ এর বিস্তৃতির তৃতীয় (T_{2+1}) ও চতুর্থ (T_{3+1}) পদের সহগ যথাক্রমে $\binom{5}{2}$ এবং $\binom{5}{3}$ ।

সাধারণভাবে $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতির r তম পদ T_{r+1} এর সহগ $\binom{n}{r}$

এখন, $\binom{n}{r}$ এর মান কত তা জানার জন্য আবারো প্যাসকেলের ত্রিভুজ লক্ষ করি । প্যাসকেলের ত্রিভুজের দুইটি হেলানো পার্শ্ব থেকে আমরা দেখতে পাই,

$$\binom{1}{0}=1,\ \binom{2}{0}=1,\ \binom{3}{0}=1,\ldots\ldots\ldots,\ \binom{n}{0}=1$$
$$\binom{1}{1}=1,\ \binom{2}{2}=1,\ \binom{3}{3}=1,\ \ldots\ldots\ldots,\ \binom{n}{n}=1$$

আমরা $n=5$ ধরে পাই

$$\binom{5}{0}=1,\ \binom{5}{1}=5,\ \binom{5}{2}=\frac{5\times4}{1\times2}=10$$
$$\binom{5}{3}=\frac{5\times4\times3}{1\times2\times3}=10,\ \binom{5}{4}=\frac{5\times4\times3\times2}{1\times2\times3\times4}=5$$

এবং $$\binom{5}{5}=\frac{5\times4\times3\times2\times1}{1\times2\times3\times4\times5}=1$$

সুতরাং $\binom{5}{3}$ এর মানের ক্ষেত্রে বলা যায়

$$\binom{5}{3}=\frac{5\times(5-1)\times(5-2)}{1\times2\times3}$$

এবং $$\binom{6}{4}=\frac{6\times(6-1)\times(6-2)\times(6-3)}{1\times2\times3\times4}$$

সাধারণ ভাবে আমরা লিখতে পারি,

$$\binom{n}{0} = 1, \ \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2).....(n-r+1)}{1\times 2 \times 3 \times 4 .... \times r}$$

উপরোক্ত চিহ্ন ব্যবহার করে পাই,

$$(1+y)^4 = \binom{4}{0}y^0 + \binom{4}{1}y^1 + \binom{4}{2}y^2 + \binom{4}{3}y^3 + \binom{4}{4}y^4$$

$$= 1 + 4y + 6y^2 + 4y^3 + y^4$$

$$(1+y)^5 = \binom{5}{0}y^0 + \binom{5}{1}y^1 + \binom{5}{2}y^2 + \binom{5}{3}y^3 + \binom{5}{4}y^4 + \binom{5}{5}y^5$$

$$= 1 + 5y + 10y^2 + 10y^3 + 5y^4 + y^5$$

এবং $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতি

$$(1+y)^n = \binom{n}{0}y^0 + \binom{n}{1}y^1 + \binom{n}{2}y^2 + \binom{n}{3}y^3 + ... + \binom{n}{n}y^n$$

$$= 1\cdot y^0 + ny^1 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}y^3 + ... + 1\cdot y^n$$

অর্থাৎ দ্বিপদী $(1+ \ y)^n$ এর বিস্তৃতি

$$\boxed{\therefore (1+y)^n = 1 + ny + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}y^3 + ... + y^n.}$$

উদাহরণ ১। $(1+3x)^5$ কে বিস্তৃত কর।

সমাধান : প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে–

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&& 1 &&&&& \\ &&&& 1 && 1 &&&& \\ &&& 1 && 2 && 1 &&& \\ && 1 && 3 && 3 && 1 && \\ & 1 && 4 && 6 && 4 && 1 & \\ 1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1 \end{array}$$

$$\therefore \ (1+3x)^5 = 1 + 5\cdot 3x + 10\cdot(3x)^2 + 10(3x)^3 + 5(3x)^4 + 1(3x)^5$$

$$= 1 + 15x + 90x^2 + 270x^3 + 405x^4 + 243x^5$$

দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে –

$$(1+3x)^5 = \binom{5}{0}(3x)^o + \binom{5}{1}3x + \binom{5}{2}(3x)^2 + \binom{5}{3}(3x)^3 + \binom{5}{4}(3x)^4 + \binom{5}{5}(3x)^5$$

বা, $(1+3x)^5 = 1 + \frac{5}{1}(3x) + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot(3x)^2 + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}(3x)^3 + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(3x)^4 + 1\cdot(3x)^5$

$$= 1 + 15x + 90x^2 + 270x^3 + 405x^4 + 243x^5.$$

উদাহরণ ২। $(1-3x)^5$ কে বিস্তৃত কর

সমাধান : প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে

$$(1-3x)^5 = 1+5\,(-3x)+10\,(-3x)^2+(10\,(-3x)^3+5\,(-3x)^4+1\,(-3x)^5$$
$$=1-15x+90x^2-270x^3+405x^4-243x^5.$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&&1&&&&& \\ &&&&1&&1&&&& \\ &&&1&&2&&1&&& \\ &&1&&3&&3&&1&& \\ &1&&4&&6&&4&&1& \\ 1&&5&&10&&10&&5&&1 \end{array}$$

দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে

$$(1-3x)^5 = \binom{5}{0}(-3x)^0+\binom{5}{1}(-3x)^1+\binom{5}{2}(-3x)^2+\binom{5}{3}(-3x)^3+\binom{5}{4}(-3x)^4+\binom{5}{5}(-3x)^5$$
$$=1\cdot1+\frac{5}{1}\cdot(-3x)+\frac{5\cdot4}{1\cdot2}(-3x)^2+\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}(-3x)^3+\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}(-3x)^4+1\cdot(3x)^5$$
$$=1-15x+90x^2-270x^3+405x^4-243x^5.$$

মন্তব্য : $(1+3x)^5$ এবং $(1-3x)^5$ এর বিস্তৃতি থেকে দেখা যাচ্ছে যে, উভয় বিস্তৃতি একই। শুধুমাত্র সহগের চিহ্ন পরিবর্তন করে , অর্থাৎ +, −, +, ... এর মাধ্যমে একটি থেকে অন্যটি পাওয়া সম্ভব।

> **কাজ :**
>
> $(1+2x^2)^7$ এবং $(1-2x^2)^7$ কে বিস্তৃত কর।

উদাহরণ ৩। $\left(1+\frac{2}{x}\right)^8$ কে পঞ্চম পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর।

সমাধান : প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে নিজে কর।

দ্বিপদী বিস্তৃতি ব্যবহার করে–

$$\left(1+\frac{2}{x}\right)^8 = \binom{8}{0}\left(\frac{2}{x}\right)^0+\binom{8}{1}\left(\frac{2}{x}\right)^1+\binom{8}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^2+\binom{8}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^3+\binom{8}{4}\left(\frac{2}{x}\right)^4 \text{.........} \quad \text{[৫ম পদ পর্যন্ত]}$$
$$=1\cdot1+\frac{8}{1}\cdot\frac{2}{x}+\frac{8\cdot7}{1\cdot2}\cdot\frac{4}{x^2}+\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{8}{x^3}+\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot\frac{16}{x^4}+\text{...................}$$
$$=1+\frac{16}{x}+\frac{112}{x^2}+\frac{448}{x^3}+\frac{1120}{x^4}+\text{................}$$

$$\therefore \left(1+\frac{2}{x}\right)^8 = 1+\frac{16}{x}+\frac{112}{x^2}+\frac{448}{x^3}+\frac{1120}{x^4}+\text{................} \quad \text{[৫ম পদ পর্যন্ত]}$$

উদহরণ ৪। $\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^8$ এর বিস্তৃতির x^3 ও x^6 এর সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান : দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে পাই,

$$\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^8=\binom{8}{0}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^0+\binom{8}{1}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^1+\binom{8}{2}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^2+\binom{8}{3}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^3+\binom{8}{4}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^4+\ldots\ldots\ldots$$

$$=1\cdot1+\frac{8}{1}\cdot\left(-\frac{x^2}{4}\right)+\frac{8\cdot7}{1\cdot2}\cdot\frac{x^4}{16}+\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}\cdot\left(-\frac{x^6}{64}\right)+\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot\left(\frac{x^8}{256}\right)+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=1-2x^2+\frac{7}{4}x^4-\frac{7}{8}x^6+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে দেখা যাচ্ছে x^3 বর্তমান নাই। অর্থাৎ x^3 এর সহগ 0 এবং x^6 এর সগহ $-\frac{7}{8}$

$\therefore$ x^3 এর সহগ 0 এবং x^6 এর সহগ $-\frac{7}{8}$

কাজ : প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে সত্যতা যাচাই কর।

উদাহরণ ৫। $(1-x)(1+ax)^6$ কে x^2 পর্যন্ত বিস্তৃত করলে যদি $1+bx^2$ পাওয়া যায়, তাহলে a ও b এ মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $(1-x)(1+ax)^6=(1-x)\left[\binom{6}{0}\cdot(ax)^0+\binom{6}{1}(ax)^1+\binom{6}{2}(ax)^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\right]$

$$=(1-x)\left[1+\frac{6}{1}\cdot ax+\frac{6\cdot5}{1\cdot2}a^2x^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right]$$

$$=(1-x)(1+6ax+15a^2x^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

$$=(1+6ax+15a^2x^2+\ldots\ldots\ldots)+(-x-6ax^2-15a^2x^3-\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

$$=1+(6a-1)x+15a^2x^2-6ax^2-15a^2x^3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=1+(6a-1)x+(15a^2-6a)x^2-15a^2x^3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

প্রশ্নমতে,

$$1+(6a-1)x+(15a^2-6a)x^2=1+bx^2$$

উভয়পক্ষ থেকে x ও x^2 এর সহগ সমীবৃত করে পাই,

$$6a-1=0, 15a^2-6a=b$$

বা $a=\frac{1}{6}$, এবং $b=15\cdot\frac{1}{36}-6\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{12}-1=-\frac{7}{12}$

$\therefore\ a=\frac{1}{6},\ b=\frac{-7}{12}$

নির্ণেয় মান $a=\frac{1}{6},\ b=\frac{-7}{12}$

উদাহরণ ৬। $(1-x)^8(1+x)^7$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান :

$(1-x)^8(1+x)^7=(1-x)(1-x)^7(1+x)^7=(1-x)(1-x^2)^7$

$=(1-x)\left[\binom{7}{0}(-x^2)^0+\binom{7}{1}(-x^2)^1+\binom{7}{2}(-x^2)^2+\binom{7}{3}(-x^2)^3+\binom{7}{4}(-x^2)^4+.......\right]$

$\therefore\ (1-x)^8(1+x)^7=(1-x)(1-x^2)^7=(1-x)[1-7x^2+21x^4-35x^6+35x^8-...........]$

$=(1-7x^2+21x^4-35x^6+35x^8+.............)+(-x+7x^3-21x^5+35x^7-35x^9+..........)$

$\therefore\ (1-x)^8(1+x)^7=1-x-7x^2+7x^3+21x^4-21x^5-35x^6+35x^8-...........$

$\therefore (1-x)^8(1+x)^7=1-x-7x^2+7x^3+21x^4-21x^5-35x^6+35x^7+35x^8............$

$\therefore\ (1-x)^8(1+x)^7$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ 35

$\therefore\ x^7$ এর সহগ 35

উদাহরণ ৭। x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে $(2-x)\left(1+\frac{1}{2}x\right)^8$ কে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত কর । উক্ত ফলাফল ব্যবহার করে $1\cdot9\times(1\cdot05)^8$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দ্বিপদী বিস্তৃতি ব্যবহার করে পাই,

$$(2-x)\left(1+\frac{1}{2}x\right)^8=(2-x)\left[\binom{8}{0}\left(\frac{x}{2}\right)^0+\binom{8}{1}\left(\frac{x}{2}\right)^1+\binom{8}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\binom{8}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\binom{8}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^4+.........\right]$$

বা $(2-x)\left(1+\frac{1}{2}x\right)^8=(2-x)\left[1\cdot1+\frac{8}{1}\cdot\frac{x}{2}+\frac{8\cdot7}{1\cdot2}\cdot\frac{x^2}{4}+\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}\frac{x^3}{8}+...............\right]$

$$=(2-x)(1+4x+7x^2+7x^3+.............)$$

$$=(2+8x+14x^2+14x^3+.............)\ +(-x-4x^2-7x^3-7x^4-............)$$

$$=2+7x+10x^2+7x^3+................$$

$$\therefore (2-x)\left(1+\frac{1}{2}x\right)^8=2+7x+10x^2+7x^3+................$$

$\therefore$ নির্ণেয় বিস্তৃতি $(2-x)\left(1+\frac{1}{2}x\right)^8=2+7x+10x^2+7x^3+................$

এখন উক্ত বিস্তৃতিতে $x=0.1$ বসিয়ে পাই,

$$(2-\cdot1)\times\left(1+\frac{\cdot1}{2}\right)^8 = 2+7\times(\cdot1)+10(\cdot1)^2+7(\cdot1)^3+...............$$

বা, $1\cdot9\times(1\cdot05)^8 = 2+\cdot7+10\times(\cdot01)+7(\cdot001)+...............$

বা, $1\cdot9\times(1\cdot05)^8 = 2+\cdot7+\cdot1+\cdot007+...............$

$= 2\cdot807$ (তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত)

নির্ণেয় মান $1\cdot9\times(1\cdot05)^8 = 2\cdot807$

কাজ : প্যাসকেলের ত্রিভুজের মাধ্যমে বিস্তৃতিটি যচাই কর।

অনুশীলনী ১০·১

১। প্যাসকেলের ত্রিভুজ বা দ্বিপদী বিস্তৃতি ব্যবহার করে $(1+y)^5$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। উক্ত বিস্তৃতির সাহায্যে $(i)\ (1-y)^5$ ও $(ii)\ (1+2x)^5$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

২। x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে

$(a)\ (1+4x)^6$, $(b)\ (1-3x)^7$ এর প্রথম চার পদ পর্যন্ত বিস্তৃতি কর।

৩। $(1+x^2)^8$ এর বিস্তৃতির প্রথম চার পদ নির্ণয় কর। উক্ত ফলাফল ব্যবহার করে $(1\cdot01)^8$ এর মান নির্ণয় কর।

৪। x এর উর্ধ্বক্রম অনুসারে নিম্নোক্ত দ্বিপদী সমূহের প্রথম তিন পদ নির্ণয় কর।

$(a)\ (1-2x)^5$, $(b)\ (1+3x)^9$

তারপর, $(c)\ (1-2x)^5(1+3x)^9$ কে x^2 পর্যন্ত বিস্তৃত কর।

৫। নিম্নোক্ত বিস্তৃতিসমূহের প্রথম চার পদ নির্ণয় কর। [দ্বিপদী বিস্তৃতি বা প্যাসক্যাল ত্রিভুজ এর যেকোনো একটি ব্যবহার করে]

$(a)\ (1-2x^2)^7$ $\qquad (b)\ \left(1+\frac{2}{x}\right)^4$ $\qquad (c)\ \left(1-\frac{1}{2x}\right)^7$

৬। x^3 পর্যন্ত $(a)\ (1-x)^6$ এবং $(b)\ (1+2x)^6$ বিস্তৃত কর। তারপর $(c)\ (1+x-2x^2)^6$ কে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত কর।

৭। x এর মান যথেষ্ট ছোট হওয়ায় x^3 এবং তার উর্ধ্বঘাতের মান উপেক্ষা করা যায়। প্রমাণ কর যে,

$(1+x)^5(1-4x)^4 = 1-11x+26x^2.$

১০·২ দ্বিপদী : $(x+y)^n$ এর বিস্তৃতি :

আমরা এ পর্যন্ত $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতি নিয়ে আলোচনা করেছি। এই পর্যায়ে আমরা দ্বিপদী বিস্তৃতির সাধারণ আকার $(x+y)^n$ নিয়ে আলোচনা করব যেখানে n ধনাত্বক পূর্ণসংখ্যা । $(x+y)^n$ এর বিস্তৃতি সাধারণভাবে দ্বিপদী উপপাদ্য নামে পরিচিত।

আমরা জানি,

$$(1+y)^n = 1+\binom{n}{1}y+\binom{n}{2}y^2+\binom{n}{3}y^3+.........+\binom{n}{r}y^r+.........+\binom{n}{n}y^n$$

এখন, $(x+y)^n = \left[x\left(1+\frac{y}{x}\right)\right]^n = x^n\left(1+\frac{y}{x}\right)^n$

$$\therefore\ (x+y)^n = x^n\left[1+\binom{n}{1}\left(\frac{y}{x}\right)+\binom{n}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2+\binom{n}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3+..........\binom{n}{n}\left(\frac{y}{x}\right)^n\right]$$

$$\therefore\ (x+y)^n = x^n\left[1+\binom{n}{1}\left(\frac{y}{x}\right)+\binom{n}{2}\frac{y^2}{x^2}+\binom{n}{3}\frac{y^3}{x^3}+..........\frac{y^n}{x^n}\right]\ \left[\because\binom{n}{n}=1\right]$$

$$= x^n+\binom{n}{1}\left(x^n\cdot\frac{y}{x}\right)+\binom{n}{2}\left(x^n\cdot\frac{y^2}{x^2}\right)+\binom{n}{3}\left(x^n\cdot\frac{y^3}{x^3}\right)+.........+.x^n\cdot\frac{y^n}{x^n}$$

$$\boxed{\therefore (x+y)^n = x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\binom{n}{3}x^{n-3}y^3+..........+y^n}$$

এটিই হচ্ছে দ্বিপদী উপপাদ্যের সাধারণ আকার। লক্ষণীয় এই বিস্তৃতি $(1+y)^n$ এর অনুরূপ। এখানে x এর ঘাত n থেকে 0 পর্যন্ত যোগ করা হয়েছে। আরো লক্ষণীয়, প্রতি পদে x ও y এর ঘাতের যোগফল দ্বিপদীর ঘাতের সমান। প্রথম পদে 'x' এর ঘাত n থেকে শুরু হয়ে সর্বশেষ পদে শূন্য। ঠিক বিপরীত ভাবে y এর ঘাত প্রথম পদে শূন্য থেকে শুরু হয়ে শেষ পদে n হয়েছে।

উদাহরণ ৮। $(x+y)^5$ কে বিস্তৃত কর এবং উহা হইতে $(3+2x)^5$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

সমাধান : $(x+y)^5 = x^5+\binom{5}{1}x^4y+\binom{5}{2}x^3y^2+\binom{5}{3}x^2y^3+\binom{5}{4}xy^4+y^5$

$$= x^5+5x^4y+\frac{5\cdot4}{1\cdot2}x^3y^2+\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}x^2y^3+\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}xy^4+y^5$$
$$= x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5.$$

$\therefore$ নির্ণয় বিস্তৃতি : $(x+y)^5 = x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5.$

এখন $x=3$ এবং $y=2x$ বসাই

$$(3+2x)^5 = 3^5+5\cdot3^4\cdot2x+10\cdot3^3(2x)^2+10\cdot3^2(2x)^3+5\cdot3(2x)^4+(2x)^5.$$
$$= 243+810x+1080x^2+720x^3+240x^4+32x^5$$

সুতরাং, $(3+2x)^5 = 243+810x+1080x^2+720x^3+240x^4+32x^5$

উদাহরণ ৯। $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^6$ কে x এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে চতুর্থ পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর এবং x মুক্ত পদটি শনাক্ত কর।

সমাধান : দ্বিপদী উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$$\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^6=(x)^6+\binom{6}{1}x^5\left(\frac{1}{x^2}\right)+\binom{6}{2}x^4\left(\frac{1}{x^2}\right)^2+\binom{6}{3}x^3\left(\frac{1}{x^2}\right)^3+\dots\dots\dots\dots$$

$$=x^6+6x^3+\frac{6\cdot5}{1\cdot2}x^4\cdot\frac{1}{x^4}+\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}x^3\frac{1}{x^6}+\dots\dots\dots\dots$$

$$=x^6+6x^3+15+20\frac{1}{x^3}+\dots\dots\dots\dots$$

উত্তর : নির্ণেয় বিস্তৃতি $x^6+6x^3+15+\frac{20}{x^3}+\dots\dots\dots\dots$

এবং x মুক্ত পদ 15

উদাহরণ ১০। x এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে $\left(2-\frac{x}{2}\right)^7$ এর বিস্তৃতির প্রথম চারটি পদ নির্ণয় কর। উক্ত বিস্তৃতির সাহায্যে $(1\cdot995)^7$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

সমাধান : $\left(2-\frac{x}{2}\right)^7=2^7+\binom{7}{1}2^6\left(-\frac{x}{2}\right)+\binom{7}{2}2^5\left(-\frac{x}{2}\right)^2+\binom{7}{3}2^4\left(-\frac{x}{2}\right)^3+\dots\dots\dots\dots$

$$=128+7\cdot64\left(-\frac{x}{2}\right)+\frac{7\cdot6}{1\cdot2}\cdot32\cdot\frac{x^2}{4}+\frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}\cdot16\left(-\frac{x}{2}\right)^3+\dots\dots\dots$$

$$\therefore\ \left(2-\frac{x}{2}\right)^7=128-224x+168x^2-70x^3+\dots\dots\dots\dots$$

$\therefore$ নির্ণেয় বিস্তার $\left(2-\frac{x}{2}\right)^7=128-224x+168x^2-70x^3+\dots\dots\dots\dots$

এখন, $2-\frac{x}{2}=1\cdot995$

বা, $\frac{x}{2}=2\cdot000-1\cdot995$

সুতরাং $x=0\cdot01$

এখন $x=0\cdot01$ বসিয়ে পাই

$$\left(2-\frac{0\cdot01}{2}\right)^7=128-224\times(\cdot01)^2+168\times(\cdot01)^2-70\times(\cdot01)^2+\dots\dots\dots\dots$$

বা, $(1\cdot995)^7=125\cdot7767$ (চার দশমিক স্থান পর্যন্ত)

১০·৩ $n!$ এবং n_{c_r} এর মান নির্ণয় :

নিচের উদাহরণগুলো লক্ষ করি :

$$2 = 2\cdot 1$$
$$6 = 3\cdot 2\cdot 1$$
$$24 = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$
$$120 = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

––––––––––––

––––––––––––

ডানদিকের গুণফলসমূহকে আমরা এখন সংক্ষেপে একটি সাংকেতিক চিহ্নের মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারি।

$$2 = 2\cdot 1 = 2\,!$$
$$6 = 3\cdot 2\cdot 1 = 3\,!$$
$$24 = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 4\,!$$
$$120 = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5\,!$$

––––––––––––––

––––––––––––––

এখন লক্ষ করি

$$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$
$$= 4\cdot(4-1)\cdot(4-2)\cdot(4-3)$$
$$5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$
$$= 5\cdot(5-1)\cdot(5-2)(5-3)\cdot(5-4)$$

––––––––––––––––––

––––––––––––––––––

$\therefore$ সাধারণভাবে লিখতে পারি, $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots\ldots 3\cdot 2\cdot 1$

এবং $n!$ কে ফেক্টোরিয়াল (*Factorial*) n বলা হয়।

তদ্রুপ, $3!$ কে ফেক্টোরিয়াল তিন,

$4!$ কে ফেক্টোরিয়াল চার ইত্যাদি পড়া হয়।

আবার লক্ষ করি :

$$\binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(1\cdot 2\cdot 3)\cdot(2\cdot 1)}$$
$$= \frac{5!}{3!\times 2!} = \frac{5!}{3!(5-3)!}$$
$$\binom{7}{4} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{4!}$$
$$= \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4!\times(3\cdot 2\cdot 1)} = \frac{7\,!}{4!\times 3\,!}$$

$$= \frac{7!}{4!(7-4)!}$$

$\therefore$ সাধারণভাবে আমরা বলতে পারি $\binom{n}{c} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

ডান পাশের ফেক্টোরিয়ালসমূহকে যে প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় তা হলো,

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = n_{c_r}$$

$$\therefore \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = 7_{c_4}$$

এবং $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 5_{c_3}$

সুতরাং, $\binom{n}{r} = n_{c_r}$

অর্থাৎ, $\binom{n}{r}$ ও n_{c_r} এর মান এক।

$$\therefore \binom{n}{1} = n_{c_1}, \quad \binom{n}{2} = n_{c_2}$$
$$\binom{n}{3} = n_{c_3}, \; \ldots\ldots \; \binom{n}{n} = n_{c_n}$$

আমরা জানি $\binom{n}{n} = 1 = n_{c_n}$

এখন $n_{c_n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!(0)!} = \frac{1}{0!}$

$$\therefore 1 = \frac{1}{0!}$$

অর্থাৎ, $0! = 1$.

মনে রাখতে হবে

$$\therefore \boxed{\begin{array}{l} n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3.2.1 \\ \binom{n}{r} = n_{c_r}, \qquad n_{c_n} = 1, \\ \binom{n}{r} = n_{c_r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \binom{n}{0} = n_{c_0} = 1 \\ \binom{n}{n} = n_{c_n} = 1,\; 0! = 1. \end{array}}$$

এখন দ্বিপদী উপপাদ্যকে আমরা $\binom{n}{r}$ এর স্থলে n_{c_r} দ্বারা প্রকাশ করব।

$$(1+y)^n = 1+n_{c_1}y+n_{c_2}y^2+n_{c_3}y^3+.........+n_{c_r}y^r+...........+n_{c_n}y^n$$

বা,

$$(1+y)^n = 1+ny+\frac{n(n-1)}{2!}y^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}y^3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}y^4.................+y^n$$

অর্থাৎ $(1+y)^n = 1+ny+\dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}y^2+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}y^3+.................+y^n$

এবং অনুরূপভাবে,

$$(x+y)^n = x^n+n_{c_1}x^{n-1}y+n_{c_2}x^{n-2}y^2+n_{c_3}x^{n-3}y^3+.........+n_{c_r}x^{n-r}y^r+...........n_{c_n}y^n$$

বা $(x+y)^n = x^n+nx^{n-1}y+\dfrac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3+.................+y^n$

লক্ষণীয় : ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n এর জন্য

১। দ্বিপদী বিস্তৃতি $(1+y)^n$ এর সাধারণ পদ বা r তম পদ $T_{r+1}=\binom{n}{r}y^r$ বা, $n_{c_r}y^r$

এখানে, $\binom{n}{r}$ বা, n_{c_r} দ্বিপদী সহগ।

$$(x+y)^n = x^n+n_{c_1}x^{n-1}y+n_{c_2}x^{n-2}y^2+n_{c_3}x^{n-3}y^3+n_{c_4}x^{n-4}y^4+...........+y^n$$

$$= x^n+nx^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}x^{n-4}y^4........+y^n$$

সাধারণ পদ বা r তম পদ

$$T_{r+1}=\binom{n}{r}x^{n-r}y^r \text{ বা } n_{c_r}x^{n-r}y^r$$

যেখানে $\binom{n}{r}$ বা n_{c_r} দ্বিপদী সহগ।

উদাহরণ ১১। $\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^5$ কে বিস্তৃত কর।

সমাধান : দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে

$$\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^5 = x^5+5_{c_1}x^{5-1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)+5_{c_2}x^{5-2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2+5_{c_3}x^{5-3}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^3+5_{c_4}x^{5-4}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^4+\left(-\frac{1}{x^2}\right)^5$$

$$= x^5-5x^4\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}x^3\cdot\frac{1}{x^4}-\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}x^2\cdot\left(\frac{1}{x^6}\right)+\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x\cdot\left(\frac{1}{x^8}\right)-\frac{1}{x^{10}}$$

$$= x^5 - 5x^2 + \frac{10}{x} - \frac{10}{x^4} + \frac{5}{x^7} - \frac{1}{x^{10}}$$

উদাহরণ ১২। $\left(2x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^8$ এর বিস্তৃতির প্রথম চারটি পদ নির্ণয় কর।

সমধান :

$$\left(2x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^8 = (2x^2)^8 + 8_{c_1}(2x^2)^7\left(-\frac{1}{2x}\right) + 8_{c_2}(2x^2)^6\left(-\frac{1}{2x}\right)^2 + 8_{c_3}(2x^2)^5\left(-\frac{1}{2x}\right)^4 + \ldots\ldots\ldots$$

$$= 256x^{16} - 512x^{13} + 448x^{10} - 224x^7 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

অনুশীলনী ১০·২

১। i $8_{c_0} = 8_{c_8}$

ii $\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{r!}$

iii $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে দ্বিতীয় পদটি

$= \frac{n(n-1)}{2!}x^2$

নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i খ. ii ও iii

গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

২। $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে $(n+1)$ সংখ্যক পদ রয়েছে। এখানে n একটি

ক. অঋণাত্মক রাশি খ. ধনাত্মক রাশি

গ. ঋণাত্মক রাশি ঘ. ভগ্নাংশ

৩। $(x+y)^5$–এর বিস্তৃতিতে দ্বিপদী সহগগুলি হলো :

ক. 5, 10, 10, 5 খ. 1, 5, 10, 10, 5, 1

গ. 10, 5, 5, 10 ঘ. 1, 2, 3, 3, 2, 1

৪। $(1-x)\left(1+\frac{x}{2}\right)^8$ –এর বিস্তৃতিতে x এর সহগ

ক. -1 খ. $\frac{1}{2}$ গ. 3 ঘ. $-\frac{1}{2}$

৫। $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^4$–এর বিস্তৃতিতে x মুক্ত পদ কত?

ক. 4 খ. 6 গ. 8 ঘ. 0

৬। $(2-x)(1+ax)^5$ কে x^2 পর্যন্ত বিস্তৃত করলে যদি $2+9x+cx^2$ পাওয়া যায় তবে a ও c এর মান

ক. $a = 1, c = 15$ খ. $a = 5, c = 15$

গ. $a = 15, c = 1$ ঘ. $a = 1, c = o$

নিচের তথ্যের আলোকে ৭ ও ৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$n_{c_r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ হলে

৭। n_{c_0} = কত?

ক. 0 খ. 1 গ. n ঘ. নির্ণয় করা যায় না

৮। $n = r = 100$ হলে n_{c_r} এর মান

ক. 0 খ. 1 গ. 100 ঘ. 200

৯। $(x+y)^4$ বিস্তৃতির সহগগুলির সাজালে আমরা পাই–

ক.

$$\begin{array}{ccccc} & & 4 & & \\ & 1 & 4 & 1 & \\ 1 & 5 & 5 & 1 & \\ 1 & 6 & 10 & 6 & 1 \end{array}$$

খ.

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

গ.

$$\begin{array}{ccccc} & & 2 & & \\ & 2 & 3 & 2 & \\ 1 & 5 & 5 & 2 & \\ 2 & 7 & 10 & 7 & 2 \end{array}$$

ঘ.

$$\begin{array}{ccccc} & & 6 & & \\ & 6 & 12 & 6 & \\ 6 & 18 & 18 & 6 & \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \end{array}$$

১০। নিম্নোক্ত প্রতিটি ক্ষেত্রে বিস্তৃত কর :

(a) $(2+x^2)^5$ (b) $\left(2-\dfrac{1}{2x}\right)^6$

১১। নিম্নোক্ত বিস্তৃতিসমূহের প্রথম চারটি পদ নির্ণয় কর।

(a) $(2+3x)^6$ (b) $\left(4-\dfrac{1}{2x}\right)^5$

১২। $\left(p-\dfrac{1}{2}x\right)^6 = r-196x+sx^2+\ldots\ldots\ldots$ হলে, p, r এবং s এর মান নির্ণয় কর।

১৩। $\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^8$ এর বিস্তৃতির x^3 এর সহগ নির্ণয় কর।

১৪। x এর ঘাতের উধর্ক্ষক্রম অনুসারে $\left(2+\dfrac{x}{4}\right)^6$ কে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত কর। উহার সাহায্যে $(1\cdot 9975)^6$ এর আসন্ন মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

১৫। দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে $(1\cdot 99)^5$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

১৬। $\left(1+\dfrac{x}{4}\right)^n$ এর বিস্তৃতির তৃতীয় পদের সহগ চতুর্থ পদের সহগের দ্বিগুণ। n এর মান নির্ণয় কর। বিস্তৃতির পদসংখ্যা ও মধ্যপদ নির্ণয় কর।

১৭। (a) $\left(k-\frac{x}{3}\right)^7$ এর বিস্তৃতিতে k^3 এর সহগ 560 হলে x এর মান নির্ণয় কর।

(b) $\left(x^2+\frac{k}{x}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 160 হলে k এর মান নির্ণয় কর।

১৮। দেওয়া আছে,

$P = (a+bx)^6$ ..... (i)

$Q = (b+ax)^5$ ..... (ii)

$R = (a+x)^n$ ..... (iii)

ক. (iii) এর বিস্তৃতিটি লিখ এবং সূত্রটি প্রয়োগ করে (i) এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

খ. যদি (i) এর বিস্তৃতির দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদের অনুপাত যথাক্রমে (ii) এর বিস্তৃতির দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদের অনুপাতের সমান হয় তবে দেখাও যে, $a:b = \sqrt{5}:2$। উপরিউক্ত উক্তির স্বপক্ষে একটি উদাহরণ দাও।

গ. দেখাও যে, (ii) এর বিস্তৃতির জোড় স্থানীয় পরম ধ্রুবকগুলির যোগফল বিজোড় স্থানীয় পরম ধ্রুবকগুলির যোগফলের সমান। তুমি এমন একটি দ্বিপদী রাশি উল্লেখ কর যার ক্ষেত্রেও উপরি উক্ত বিষয়টি সত্য হবে।